数理解析研究所講究録 1292 巻 2002 年 115-135

等質空間内の荷電粒子の運動

福島工業高等専門学校 一般教科　井川治 (Osamu Ikawa)
Department of General Education,
Fukushima National College of Technology

1 導入

連結 semi-Riemann 多様体 (M,g) に閉 2-形式 F が備えられているとし、F を**電磁場**と考える。(M が Kähler 多様体のときには電磁場としては常に Kähler 形式の定数倍を考える。これを **Kähler 電磁場**と言う。M が佐々木多様体のときには電磁場としては常に Kähler 形式の類事物の定数倍を考える。) $\iota(X) : \bigwedge^m(M) \to \bigwedge^{m-1}(M)$ で内部積作用素を表す。$\mathcal{L} : T(M) \to T^*(M)$ で Legendre 変換を表す:

$$\mathcal{L}: T(M) \to T^*(M); u \mapsto \mathcal{L}(u), \quad \mathcal{L}(u)(v) = g(u,v) \quad (v \in T(M)).$$

電磁場 F、**位置エネルギー** $U \in C^\infty(M)$ の下での**荷電粒子の運動方程式**はその質点の軌跡を $x = x(t)$ とすると

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = -\mathcal{L}^{-1}(\iota(\dot{x})F) - \mathrm{grad}U \tag{1.1}$$

$(F = 0, U = 0$ のときが測地線になる。) この運動方程式は理論物理学に由来する (§2 または [18, p. 112, (19.15)] を参照)。荷電粒子の運動 (1.1) に対して**力学的エネルギー**

$$\frac{1}{2}g(\dot{x},\dot{x}) + U(x(t))$$

が保存される。力学的エネルギー保存則を踏まえて接束 $(T(M),\pi)$ 上の関数 H を

$$H(u) = \frac{1}{2}g(u,u) + U(\pi(u)) \quad (u \in T(M))$$

と定める。

電磁ポテンシャル A が存在すると仮定する $(F = dA)$. M 内の曲線 $x = x(t)$ $(0 \le t \le 1)$ に対して次の汎関数を考える:

$$E_A(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}g(\dot{x},\dot{x}) + \frac{1}{2}A(\dot{x}) - U(x(t))\right) dt.$$

E_A の Euler-Lagrange 方程式は荷電粒子の運動方程式 (1.1) になる。但し

$$(2dA)(X,Y) = X(A(Y)) - Y(A(X)) - A([X,Y]).$$

例えばMが非compact型Hermite対称空間ならば、それはEuclid空間と微分同型なので電磁ポテンシャルは存在する。他方、Mがcompact Kähler多様体ならばKähler電磁場に電磁ポテンシャルは存在しない。

§2では荷電粒子の運動方程式の由来について述べる。§3で測地線のHamilton力学について復習する。この節の結果は次の節で利用される。§4では荷電粒子の運動を接束上の力学的エネルギーに対応するハミルトニアンHと標準的でないsymplectic構造を用いてHamilton系と見る。また、力学的エネルギー保存則とは異なる保存法則について説明する。一般に与えられた運動方程式が周期解を持つかどうかは興味深い問題であるがこの問題に関連して§5では前節で得られた保存則を利用してある条件を満たす等質空間内の荷電粒子の運動はもし自交点を持てば周期的な単純閉曲線になることを示す。また、この結果を応用してある条件を満たす等質Kähler多様体内には平坦な複素トーラスが全測地的複素部分多様体としては入らないことを示す。§6では佐々木多様体の定義を与えその典型例である奇数次元球面内の標準電磁場に関する荷電粒子の運動を詳しく記述し、特に周期条件について述べる。§7では佐々木-Kähler沈め込み$\pi : \tilde{M} \to M$を定義し佐々木多様体$\tilde{M}$内の標準電磁場に関する荷電粒子の運動がπによりKähler多様体M内の標準電磁場に関する荷電粒子の運動に移ることを示す。特に$\tilde{M}$内の測地線はM内の荷電粒子に移る。§8ではHermite対称空間内の標準電磁場に関する荷電粒子の運動について詳しく調べる。§9ではcomapct型佐々木ϕ-対称空間内の荷電粒子の運動について詳しく調べる。

2 物理的背景

$\rho = \rho(t,x,y,z)$で**電流密度**、$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}(t,x,y,z)$で**電荷密度**を表す。電流密度と電荷密度はバラバラでは存在せず、次の**連続の方程式**を満たす:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{J} = 0. \tag{2.2}$$

磁場$\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$と**電場**$\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$はそれぞれ時刻に依存する$\boldsymbol{R}^3$上のベクトル場である。電場、磁場の振る舞いを規定するMaxwell方程式は次で与えられる。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0 \qquad \text{(磁気単極子の非存在)}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0 \qquad \text{(Faradayの法則)}, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{(Gaussの法則)}, \tag{2.5}$$

$$-\epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{J} \qquad \text{(Ampere-Maxwellの法則)}. \tag{2.6}$$

光速度cは$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$によって与えられる。$(t, x_1, x_2, x_3)$を$\boldsymbol{R}^4$の標準座標とする。$\boldsymbol{R}^4$上の2-形式$F$を

$$F = \sum_{i=1}^{3} E_i dx_i \wedge dt + \mathfrak{S}_{1,2,3} B_1 dx_2 \wedge dx_3$$

によって定める。このとき、

$$dF = (\mathrm{div}\boldsymbol{B})dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial B_i}{\partial t} + (\mathrm{rot}\boldsymbol{E})_i\right) dt \wedge dx_i \wedge dx_{i+1}.$$

よって条件(2.3)及び(2.4)は条件$dF = 0$と同値である。$\boldsymbol{R}^4$上のLorentz計量$\langle\ ,\ \rangle$を

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = -c^2, \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = 0$$

によって定める。$\boldsymbol{R}^4_3 = (\boldsymbol{R}^4, \langle\ ,\ \rangle)$によって4次元Minkowski時空を表す。Hodgeの星作用素$* : \bigwedge^2(\boldsymbol{R}^4_3) \to \bigwedge^2(\boldsymbol{R}^4_3)$は共形不変で$*^2 = -1$を満たす。電流電荷密度$j \in \bigwedge^1(\boldsymbol{R}^4_3)$を

$$j = \frac{\rho}{\epsilon_0}dt - \frac{1}{c^2\epsilon_0}\sum_{i=1}^{3} J_i dx_i$$

と定める。

$$d * j = -\frac{1}{c\epsilon_0}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{J}\right) dt \wedge dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

となるので連続の方程式(2.2)は$\delta j = 0$と同値である。

$$\delta F = *d * F = (\mathrm{div}\,\boldsymbol{E})dt + \frac{1}{c}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial E_i}{\partial t} - c(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B})_i\right) dx_i,$$

となるので条件(2.5)及び(2.6)は条件$\delta F = j$と同値である。

$x(\tau) = (t(\tau), x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))$を$\boldsymbol{R}^4_3$内の曲線とする。ここで、$\tau$は固有時と呼ばれる。質量$m$、電荷$q$の荷電粒子の運動方程式$m\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = -q\mathcal{L}^{-1}(\iota(\dot{x})F)$は

$$\begin{cases} m\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{q}{c^2}\sum_{i=1}^{3} E_i \frac{dx_i}{d\tau}, \\ m\frac{d^2x_1}{d\tau^2} = q\left(E_1\frac{dt}{d\tau} + \frac{dx_2}{d\tau}B_3 - \frac{dx_3}{d\tau}B_2\right), \\ m\frac{d^2x_2}{d\tau^2} = q\left(E_2\frac{dt}{d\tau} + \frac{dx_3}{d\tau}B_1 - \frac{dx_1}{d\tau}B_3\right), \\ m\frac{d^2x_3}{d\tau^2} = q\left(E_3\frac{dt}{d\tau} + \frac{dx_1}{d\tau}B_2 - \frac{dx_2}{d\tau}B_1\right). \end{cases}$$

と同値である。この方程式において形式的に光速度$c = \infty$とおき、$t = \tau$と近似すれば(第一式は$0 = 0$となるので無視し)第二式から第四式が

$$m(\ddot{x_1}, \ddot{x_2}, \ddot{x_3}) = q(\boldsymbol{E} + (\dot{x_1}, \dot{x_2}, \dot{x_3}) \times \boldsymbol{B})$$

となり高校で学んだ荷電粒子の運動方程式と一致する。

$$\langle F, *F \rangle = \frac{2}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}, \quad \langle F + *F, F + *F \rangle = -\langle F - *F, F - *F \rangle = \frac{4}{c}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B},$$

となるので条件$\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$は次の条件の一つ(従って全部)と同値である:

$$\langle F, *F \rangle = 0, \quad \langle F - *F, F - *F \rangle = 0, \quad \langle F + *F, F + *F \rangle = 0.$$

3　測地線の Hamilton 力学

この節では semi-Riemann 多様体内の測地線 ($\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0$) の Hamilton 力学について復習する。その理由は次の節で述べる荷電粒子の Hamilton 力学と比較するためである。運動エネルギーに対応する $T(M)$ 上の関数を H と表す:

$$H(u) = \frac{1}{2}g(u,u) \quad (u \in T(M)).$$

一般に多様体上の各点で非退化な閉二次微分形式を symplectic 形式と呼ぶ。$T(M)$ の標準 symplectic 構造 ω に関する H の Hamilton ベクトル場を X_H と表す、即ち、$dH = \iota(X_H)\omega$. $C^\infty(T(M))$ の ω に関する Poisson 積を $\{\ ,\ \}$ と表す:

$$\{f_1, f_2\} = X_{f_1}(f_2) = \omega(X_{f_2}, X_{f_1}) \qquad (f_1, f_2 \in C^\infty(T(M))).$$

測地線を $T(M)$ 内の曲線とみなせば X_H の積分曲線と一致することが知られている ([5])。より正確に述べると次のようになる。$u \in T(M)$ に対して x_u で $\dot{x}_u(0) = u$ なる測地線を表す。測地流 (geodesic flow) $\Phi_t : T(M) \to T(M)$ を $\Phi_t(u) = \dot{x}_u(t)$ と定めると $T(M)$ の測地流の各軌道は X_H の積分曲線と一致する。次の節ではこれを荷電粒子の運動に一般化した形の主張で述べる (定理 4. 2)。写像

$$P : \mathfrak{X}(M) \to (C^\infty(T(M)), \{\ ,\ \}); Y \mapsto P_Y$$

を $P_Y(u) = g(u, Y)$ と定めると明らかに P は単射になる。Y が Killing ベクトル場ならば P_Y は測地線の保存量になることが知られている ([12, Lemma 9.26])。言い換えれば任意の Killig ベクトル場 Y について

$$\{H, P_Y\} = 0. \tag{3.7}$$

命題 3. 1 ([5, p. 222]) $\{P_Y, P_Z\} = P_{[Y,Z]} \quad (Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$.

証明 $(x^1, \cdots, x^n)$ を M の局所座標系とする。g の $(x^1, \cdots, x^n)$ に関する成分を g_{ij} で表す。(g^{ij}) で行列 (g_{ij}) の逆行列を表す。$T(M)$ の局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n, u^1, \cdots, u^n)$ を

$$u = \sum_{i=1}^{n} u^i(u)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad (u \in T(M))$$

とおくことにより導入する。標準 symplectic 構造 ω の局所表示は

$$\omega = \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} u^j dx^i \wedge dx^k + \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \wedge du^j = -d(\sum g_{ij} u^j dx^i)$$

によって与えられる。この記号を論文全体を通して用いる。

ベクトル場 Y と Z を $Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Z = \sum Z^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ と表示すると

$$P_Z = \sum g_{ij} Z^i u^j, \quad P_{[Y,Z]} = \sum g_{jk}\left(Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} - Z^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right) u^k$$

となる。$dP_Y = \iota(X_{P_Y})\omega$なので

$$X_{P_Y} = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \sum \left(Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{jk} \right) g^{il} u^j \frac{\partial}{\partial u^l}. \tag{3.8}$$

よって

$$\begin{aligned}
\{P_Y, P_Z\} &= X_{P_Y}(P_Z) \\
&= \sum Y^i \frac{\partial (g_{jk} Z^j)}{\partial x^i} u^k - \sum \left(Y^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial Y^k}{\partial x^i} g_{jk} \right) g^{il} u^j g_{pl} Z^p \\
&= \sum Y^i \frac{\partial (g_{jk} Z^j)}{\partial x^i} u^k - \sum \left(Y^j \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} g_{jk} \right) Z^i u^k \\
&= \sum g_{jk} \left(Y^i \frac{\partial Z^j}{\partial x^i} - Z^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) u^k \\
&= P_{[Y,Z]}.
\end{aligned}$$

ゆえに主張が示された。 □

4 荷電粒子の Hamilton 力学

この節ではたとえFが電磁ポテンシャルを持たなくても力学的エネルギーに対応するハミルトニアンHと$T(M)$上の標準的でない symplectic 構造を用いて荷電粒子の運動 (1.1) は Hamilton 系になることを示す。

$T(M)$上の標準的な symplectic 構造をωと表す。$T(M)$上の閉2次微分形式ω_Fを

$$\omega_F = \omega - \pi^* F$$

と定める。

命題 4. 1 ([7]) ω_Fは各点で非退化、即ち、$T(M)$上の symplectic 構造になる。

証明 Fの$(x^1, \cdots, x^n)$に関する成分F_{ij}は$F_{ij} = F(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$によって与えられる。閉2次微分形式$\omega_F$の局所表示は

$$\omega_F = \sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} u^j dx^i \wedge dx^k + \sum_{i,j} g_{ij} dx^i \wedge du^j - \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

によって与えられる。ゆえにω_Fは各点で非退化である、即ち、ω_Fは$T(M)$上の symplectic 構造である。 □

X^F_HでHのω_Fに関するハミルトンベクトル場を表す。

$u \in T(M)$に対してx_uで荷電粒子の運動 (1.1) で初期条件$\dot{x}_u(0) = u$となるものを表す。electromagnetic flow $\Phi_t : T(M) \to T(M)$を$\Phi_t(u) = \dot{x}_u(t)$と定める。

定理 4.2 ([7]) $T(M)$ の electromagnetic flow の各軌道は X_H^F の積分曲線に一致する。

注意 4.3 $F=0$ のとき、この結果は既知である ([11])。$M=\boldsymbol{R}_1^4, U=0$ のときも既知である ([5, § 20])。

証明 Γ_{ij}^k で Christoffel 記号を表す。$x(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$ を M 内の曲線とすると

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x}=\sum_k(\ddot{x}^k+\sum_{i,j}\dot{x}^i\dot{x}^j\Gamma_{ij}^k)\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

ここで

$$\mathrm{grad}U=\sum_{i,j}g^{ij}\frac{\partial U}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}\quad 及び\quad \mathcal{L}^{-1}(\iota(\dot{x})F)=\sum_{i,j,k}\dot{x}^kF_{ki}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j},$$

となるから荷電粒子の運動方程式 (1.1) は

$$\ddot{x}^k+\sum_{i,j}\dot{x}^i\dot{x}^j\Gamma_{ij}^k=-\sum_i g^{ik}\frac{\partial U}{\partial x^i}-\sum_{i,j}\dot{x}^jF_{ji}g^{ik}.$$

と同値である。ハミルトニアン H の局所表示は

$$H(x^1,\cdots,x^n,u^1,\cdots,u^n)=\frac{1}{2}\sum_{i,j}u^iu^jg_{ij}+U(x^1,\cdots,x^n)$$

となるから

$$dH=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}u^iu^jdx^k+\sum_{i,j}g_{ij}u^idu^j+\sum_k\frac{\partial U}{\partial x^k}dx^k.$$

また $dH=\iota(X_H^F)\omega_F$ より

$$X_H^F=\sum_i u^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\sum\left(\Gamma_{ji}^lu^ju^i+g^{kl}\frac{\partial U}{\partial x^k}+g^{kl}F_{ik}u^i\right)\frac{\partial}{\partial u^l}. \tag{4.9}$$

ここで上の等式における右辺の意味を述べておく。

ベクトル場 $X_{H_0}=\sum_i u^i\frac{\partial}{\partial x^i}-\sum\Gamma_{ji}^lu^ju^i\frac{\partial}{\partial u^l}$ は $H_0(u)=\frac{1}{2}g(u,u)$ の ω に関する Hamilton ベクトル場である。

$-\sum g^{kl}\frac{\partial U}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial u^l}$ は $U\circ\pi$ の ω に関する Hamilton ベクトル場である。

$Y=-\sum g^{kl}F_{ik}u^i\frac{\partial}{\partial u^l}$ は方程式 $\iota(Y)\omega=\iota(X_{H_0})\pi^*F$ により特徴付けられる。

X_H の積分曲線 $(x^1(t),\cdots,x^n(t),u^1(t),\cdots,u^n(t))$ は

$$\dot{x}^l=u^l,\quad \dot{u}^l=-\left(\sum\Gamma_{ji}^lu^ju^i+\sum g^{kl}\frac{\partial U}{\partial x^k}+\sum g^{kl}F_{ik}u^i\right).$$

よって主張が示された。 □

(M,g) 上の二次微分形式 F の全体と semi-Riemann 計量 g に関して交代的な $(1,1)$-テンソル ϕ の全体とは

$$F(X,Y)=g(X,\phi Y),\quad \phi Y=-\mathcal{L}^{-1}(\iota(Y)F) \tag{4.10}$$

によって対応する。

以下、$U=0$ の場合を考察する。従って、$H(u)=\frac{1}{2}g(u,u)$ で荷電粒子の運動方程式は

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = -\mathcal{L}^{-1}(\iota(\dot{x})F). \tag{4.11}$$

Lie 部分環 $\mathcal{I}_\phi(M)$ を

$$\mathcal{I}_\phi(M) = \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid L_X g = 0,\ L_X\phi = 0\}$$

と定める。

命題 4.4 ([8]) $X \in \mathcal{I}_\phi(M)$ に対して $d(\iota(X)F)=0$ となる。

証明 Cartan の関係式と $dF=0$ より

$$2d(\iota(X)F) = L_XF - 3!\iota(X)dF = L_XF.$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
2(d(\iota(X)F))(Y,Z) &= (L_XF)(Y,Z) \\
&= X(F(Y,Z)) - F([X,Y],Z) - F(Y,[X,Z]) \\
&= X(g(Y,\phi Z)) - g([X,Y],\phi Z) - g(Y,\phi[X,Z]) \\
&= g(Y,[X,\phi Z]) - g(Y,\phi[X,Z]) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ここで第四の等式は $L_Xg=0$ から従う。$L_X\phi=0$ から最後の等式が従う。 □

上の命題を踏まえて、いつ $\iota(X)F$ $(X \in \mathcal{I}_\phi(M))$ がある関数 f_X の外微分になるのかを考察したものが次の二つの命題である。(もし、このような f_X が存在すれば X と f_X とから力学的エネルギー保存則とは異なる荷電粒子の運動の保存量が得られることが後でわかる (命題4.9 及び注意4.10) ので、このことに興味がある)

命題 4.5 ([7]) $X, Y \in \mathcal{I}_\phi(M)$ に対して $\iota([X,Y])F = -d(F(X,Y))$.

証明 Z を M の任意のベクトル場とする。semi-Riemann 計量 g は平行なので

$$Z(F(X,Y)) = Z(g(X,\phi Y)) = g(\nabla_ZX,\phi Y) - g(\phi X,\nabla_ZY) + g(X,(\nabla_Z\phi)(Y)).$$

X と Y は Killing ベクトル場なので

$$g(\nabla_ZX,\phi Y) - g(\phi X,\nabla_ZY) = g(Z,\nabla_{\phi X}Y - \nabla_{\phi Y}X).$$

X と Y は ϕ の無限小自己同型なので

$$\begin{aligned}
\nabla_{\phi X}Y - \nabla_{\phi Y}X &= \nabla_Y(\phi X) + [\phi X,Y] - \nabla_X(\phi Y) - [\phi Y,X] \\
&= \phi[X,Y] + (\nabla_Y\phi)(X) - (\nabla_X\phi)(Y).
\end{aligned}$$

これらを組み合わせて

$$Z(F(X,Y)) = g(Z,\phi[X,Y]) + \mathfrak{S}_{X,Y,Z}\, g(X,(\nabla_Z\phi)(Y)) = -F([X,Y],Z),$$

ここで最後の等式は $dF = 0$ から得られる。 □

$\iota(X)F = df_X$ ($X \in \mathcal{I}_\phi(M)$) となるためのもう一つの十分条件について述べるために次の定義を用意する。

定義 4.6 Mを多様体、gをM上Riemann計量、ξをベクトル場、ηを1-形式、ϕを$(1,1)$-テンソルとする。

(M,g,ϕ,η,ξ) が**概佐々木多様体**であるとは次を満たす場合を言う。

(1) $\phi^2 = -1 + \eta \otimes \xi$,

(2) $\eta(\xi) = 1 \quad (||\xi|| = 1)$,

(3) $g(X,\xi) = \eta(X)$,

(4) $g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$,

(5) $d\eta(X,Y) = g(X,\phi Y)$,

概佐々木多様体の定義は電場無しで磁場のみを考えたmagnetic theoryと深く関わっていると筆者は考えている。実際、(5) はηが閉二次微分形式$g(X,\phi Y)$の電磁ポテンシャルになっていることを意味する。ϕXはξとXの両方に直交するのでξは磁場、そして、運動$x(t)$に対して$\phi(\dot{x})$はLorentz力を表していると考えられる。

命題 4.7 ([8]) (M,g,ϕ,η,ξ)を概佐々木多様体とする。Fをϕに対応する閉二次微分形式とする。このとき、$X \in \mathcal{I}_\phi(M)$ に対して

$$\iota(X)F = -\frac{1}{2}d(\eta(X)).$$

証明 Cartanの関係式を用いて

$$2!\iota(X)F = 2!\iota(X)d\eta = -d(\iota(X)\eta) + L_X\eta.$$

ここで

$$\begin{aligned}
(L_X\eta)(Y) &= X(\eta(Y)) - \eta([X,Y]) \\
&= X(g(Y,\xi)) - g([X,Y],\xi) \\
&= g(Y,[X,\xi]) \\
&= g(\phi Y, \phi[X,\xi]) + \eta(Y)\eta([X,\xi]) \\
&= g(\phi Y, [X,\phi\xi]) + \eta(Y)g([X,\xi],\xi) \\
&= \eta(Y)g([X,\xi],\xi) \\
&= \frac{1}{2}\eta(Y)X||\xi||^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

第三及び第七の等号は$L_X g = 0$から、第四の等号は概佐々木多様体の定義から従う。第五の等号は$L_X\phi = 0$から従う。第六の等号は$\phi\xi = 0$から従う。最後の等号は$||\xi|| = 1$から従う。 □

$Y \in \mathcal{I}_\phi(M)$とする。ある関数$f_Y$が存在して

$$\iota(Y)F = df_Y$$

と仮定する。$T(M)$上の関数P_Y^Fを

$$P_Y^F(u) = g(u, Y) - f_Y(\pi(u)) \quad (u \in T(M))$$

と定める。$\{\, ,\, \}_F$でω_Fに関するPoisson積を表す。

命題 4.8 $Y \in \mathcal{I}_\phi(M)$とする。ある関数$f_Y$が存在して$\iota(Y)F = df_Y$と仮定する。このとき$P_Y^F$の$\omega_F$に関するHamiltonベクトル場は$X_{P_Y}$の$P_Y$に関するHamiltonベクトル場に一致する。

証明 $\iota(Y)F = df_Y$と(3.8)を用いて$d(f_Y \circ \pi) = \iota(X_{P_Y})\pi^* F$. よって

$$dP_Y^F = dP_Y - d(f_Y \circ \pi) = \iota(X_{P_Y})\omega - \iota(X_{P_Y})\pi^* F = \iota(X_{P_Y})\omega_F.$$

ゆえに主張が示された。 □

命題 4.9 ([7], [8]) $Y \in \mathcal{I}_\phi(M)$とする。ある関数$f_Y$が存在して$\iota(Y)F = df_Y$と仮定する。このとき$\{H, P_Y^F\}_F = 0$.

注意 4.10 上の命題を言い換えると(4.11)によって定義される任意の荷電粒子の運動$x(t)$に対して

$$g(\dot{x}(t), Y) - f_Y(x(t))$$

が時刻tに依存しない保存量になるということである。

証明

$$\{H, P_Y^F\}_F = -X_{P_Y}(H) = \{H, P_Y\} = 0,$$

始めの等号は前命題から得られる。最後の等号は(3.7)から得られる。 □

別証明 $x(t)$を荷電粒子の運動(4.11)とする。このとき、

$$\frac{d}{dt}g(\dot{x}, Y) = g(\nabla_{\dot{x}}\dot{x}, Y) + g(\dot{x}, \nabla_{\dot{x}}Y).$$

YはKillingベクトル場なので$g(\dot{x}, \nabla_{\dot{x}}Y) = 0$. $x(t)$は荷電粒子の運動なので

$$\frac{d}{dt}g(\dot{x}, Y) = -g(\mathcal{L}^{-1}(\iota(\dot{x}F)), Y) = -F(\dot{x}, Y) = (\iota(Y)F)(\dot{x}) = \frac{d}{dt}f_Y(x(t)).$$

ゆえに主張が従う。 □

Poisson積$\{\ ,\ \}_F$に関してJacobiの恒等式が成り立つ。特に、$T(M)$上の二つの関数f_1, f_2が$\{H, f_1\}_F = \{H, f_2\}_F = 0$を満たせば$\{H, \{f_1, f_2\}_F\}_F = 0$となる。即ち、$f_1, f_2$が共に荷電粒子の保存量なら見かけ上、新しい第三の保存量$\{f_1, f_2\}_F$が得られる。従って命題4.9より$\{P_Y^F, P_Z^F\}_F$ $(Y, Z \in \mathcal{I}_\phi(M))$ が荷電粒子の運動の保存量になる。保存量$\{P_Y^F, P_Z^F\}_F$と保存量$P_{[Y,Z]}^F$とを比較する。そのために$C^\infty(T(M))$に同値関係$\sim$を次で導入する:

$$f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_2 - f_1 = \text{定数関数} \quad (f_1, f_2 \in C^\infty(T(M))).$$

この同値関係による同値類の全体を$C^\infty(T(M))/\boldsymbol{R}$と表す。

$$\{[f_1], [f_2]\}_F = [\{f_1, f_2\}_F] \quad (f_1, f_2 \in C^\infty(T(M))),$$

とおくと$\{\ ,\ \}_F$はwell-definedである。ここで、$[f]$は$f \in C^\infty(T(M))$の同値類を表す。

命題 4.11 ([7]) 任意の$Y \in \mathcal{I}_\phi(M)$についてある関数$f_Y$が存在して$df_Y = \iota(Y)F$と仮定する。このとき、

$$\{[P_Y^F], [P_Z^F]\}_F = [P_{[Y,Z]}^F] \qquad (Y, Z \in \mathcal{I}_\phi(M)).$$

証明

$$\begin{aligned}
\{P_Y^F, P_Z^F\}_F &= -\omega_F(X_{P_Y}, X_{P_Z}) \\
&= -(\omega(X_{P_Y}, X_{P_Z}) - (\pi^* F)(X_{P_Y}, X_{P_Z})) \\
&= \{P_Y, P_Z\} + F(Y, Z) \\
&= P_{[Y,Z]} + F(Y, Z) \\
&= P_{[Y,Z]} - f_{[Y,Z]} + f_{[Y,Z]} + F(Y, Z) \\
&= P_{[Y,Z]}^F + (f_{[Y,Z]} + F(Y, Z)),
\end{aligned}$$

第一の等号は命題4.9から従う。第三の等号は(3.8)から従う。第四の等号は補題3.1から従う。命題4.5を用いて証明が完成する。 □

5 荷電粒子の運動の単純性

多様体内の曲線が**単純**であるとは、それが周期的な単純閉曲線であるか、または、自交点を持たない場合を言う。

この節では命題4.9を等質空間内の荷電粒子の運動の単純性を示すことに応用する。

定義 5.1 ([7]) (M, g)を連結semi-Riemann多様体とする。ϕをsemi-Riemann計量gに関して交代的な$(1,1)$-テンソルとする。このとき、三組(M, g, ϕ)がG-**等質**であるとは、MにGがLie変換群として推移的に作用し、その働き方が等長的でϕ-作用と可換になる場合を言う。

定理 5.2 ([7], [8]) (M, g, ϕ) をG-等質semi-Riemann多様体とし、$\mathfrak{g}$でGのLie環を表す。ϕに(4.10)によって対応する二次微分形式Fは閉と仮定する。更に次の三つの条件のいずれか一つが成り立てば荷電粒子の運動は単純曲線になる。

(1) $H^1(M) = \{0\}$,

(2) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$,

(3) (M, g, ϕ, η, ξ) は概佐々木多様体である。

証明 $Y \in \mathfrak{g}$の生成するM上のベクトル場$(\in \mathcal{I}_\phi(M))$ もYと表す。命題4.4, 4.5及び命題4.7から上の(1)~(3)いずれの場合も任意の$Y \in \mathfrak{g}$に対してある関数f_Yが存在して$df_Y = \iota(Y)F$. 荷電粒子の運動が$x(0) = x(1) = o$を満たすと仮定する。このとき、命題4.9より

$$g(\dot{x}(0), Y_o) - f_Y(x(o)) = g(\dot{x}(1), Y_o) - f_Y(x(o)).$$

MはG-等質なので$T_o(M) = \{X_o \mid X \in \mathcal{I}_\phi(M)\}$. semi-Riemann計量$g$の非退化性から$\dot{x}(0) = \dot{x}(1)$. 荷電粒子の運動方程式は2階常微分方程式なので$x(t)$は周期的な単純閉曲線になる。 □

注意 5.3 小林昭七によりRiemann等質空間内の測地線は単純曲線になることが知られている([12, p. 321])。

系 5.4 ([8]) MをG-等質Kähler多様体で上の定理中の(1)または(2)が成り立つとする。このとき、M内には全測地的複素部分多様体として平坦な複素トーラスが入らない。

証明 平坦な複素トーラス$T = \boldsymbol{C}^n/\Gamma$には単純でない荷電粒子の運動が存在することを言う。x, yを$\boldsymbol{C}^n$内の異なる二点でTに落とすと同じ点になるものとする。x, yを円で結びその円をトーラスに落とすとそれは単純でない荷電粒子の運動になる。仮に、系の条件を満たす全測地的複素部分多様体が存在したとするとトーラス内の荷電粒子の運動はMで見ても荷電粒子の運動に見えるから矛盾が起こる。 □

6 佐々木多様体

定義 6.1 概佐々木多様体(M, g, ϕ, η, ξ)が**佐々木多様体**であるとは

$$(\nabla_X \phi)(Y) = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X$$

を満たす場合を言う。

佐々木多様体内の荷電粒子の運動方程式をκを定数として

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = \kappa \phi \dot{x}$$

と定義する。

命題 6. 2 佐々木多様体(M,g,ϕ,η,ξ)内の荷電粒子の運動$x(t)$に対して$\eta(\dot{x})$は荷電粒子の保存量である。

証明
$$\frac{d}{dt}\eta(\dot{x}) = g(\nabla_{\dot{x}}\dot{x},\xi) + g(\dot{x},\nabla_{\dot{x}}\xi) = \kappa g(\phi\dot{x},\dot{x}) - g(\dot{x},\phi\dot{x}) = 0.$$
ゆえに主張が示された。 □

佐々木多様体においてξの積分曲線は測地線になるので初期ベクトルがξに比例する荷電粒子の運動はξの積分曲線として得られる測地線と一致する。

例えば奇数次元球面S^{2n+1}は次のようにして自然に佐々木多様体の構造を持つ。S^{2n+1}を$\boldsymbol{C}^{n+1}$内の原点を中心とする半径1の球面と考える。S^{2n+1}にboldmathC^{n+1}から自然に誘導されるRiemann計量gを入れる。νでS^{2n+1}の$\boldsymbol{C}^{n+1}$に対する外向き単位法線ベクトルを表す。Jで$\boldsymbol{C}^{n+1}$の複素構造を表し

$$\xi = -J\nu, \quad \eta(X) = g(X,\xi), \quad \phi X = (JX)^T = JX - \eta(X)\nu,$$

とおくと$(S^{2n+1},g,\phi,\eta,\xi)$は佐々木多様体になる([3]参照)。$(S^{2n+1},g,\phi,\eta,\xi)$内の荷電粒子の運動について次が成り立つ。

定理 6. 3 ([8]) 初期条件$x(0) = e_1$及び

$$\dot{x}(0) = \sqrt{-1}v_1e_1 + \sum_{j=2}^{n+1} v_je_j \quad (v_1 \in \mathbf{R}, (v_2,\cdots,v_{n+1}) \neq 0)$$

となる奇数次元球面S^{2n+1}内の荷電粒子の運動は

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\kappa t\right) \\ &\quad \left\{\left(\cos\omega t + \frac{\sqrt{-1}}{\omega}(v_1 - \frac{\kappa}{2})\sin\omega t\right)e_1 + \frac{\sin\omega t}{\omega}\sum_{j=2}^{n+1} v_je_j\right\} \end{aligned}$$

で与えられる。但し、

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{4}\kappa^2 - \kappa v_1 + v^2} > 0, v = ||\dot{x}(0)||.$$

この運動が周期的となるための条件は、$\kappa/\omega \in \mathbf{Q}$ となることである。

証明 $g(x,\dot{x}) = 0$なので$g(x,\ddot{x}) + ||\dot{x}||^2 = 0.$ これより

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = \ddot{x} - g(\ddot{x},x) = \ddot{x} + ||\dot{x}||^2 x = \ddot{x} + v^2 x.$$

従って運動方程式は次と同値である。

$$\ddot{x} + v^2 x = \kappa(J\dot{x} - g(J\dot{x}, x)x).$$

ここで

$$\frac{d}{dt}(g(J\dot{x}, x)) = g(J\ddot{x}, x) = -g(\ddot{x}, Jx) = -\kappa g(J\dot{x} - g(\dot{x}, x)x, Jx) = 0,$$

となるので

$$g(J\dot{x}, x) = g(J\dot{x}(0), x(0)) = -v_1$$

が得られる。従って運動方程式は

$$\ddot{x} + v^2 x = \kappa(\sqrt{-1}\dot{x} + v_1 x)$$

と同値である。この方程式を解いて主張が得られる。 □

7 佐々木-Kähler沈め込みと荷電粒子の運動

定義 7.1 $(\bar{M}, g, \phi, \eta, \xi)$ を $2n+1$ 次元佐々木多様体、(M, g, J) を実 $2n$ 次元Kähler多様体とする。C^∞ 写像 $\pi : \bar{M} \to M$ が**佐々木-ケーラー沈め込み**であるとは次を満たす場合を言う。

(1) π は全射である。

(2) $d\pi_x$ $(x \in \bar{M})$ は全射である。

(3) $\pi^{-1}(y)$ $(y \in M)$ は ξ の積分曲線 (測地線) である。

(4) $d\pi$ は水平ベクトルの内積を保つ。

(5) 水平ベクトル X について $d\pi\phi X = Jd\pi X$.

ここで $\bar{M}$ のベクトル X が**水平**であるとは $\eta(X) = 0$ となるときを言う。また $X//\xi$ となるとき X を**垂直**と言う。

佐々木-Kähler沈め込みの例は§9で与える。

$\bar{\nabla}$ 及び ∇ でそれぞれ $\bar{M}$ 及び M のLevi-Civita接続を表す。

定理 7.2 $\pi : \bar{M} \to M$ を佐々木-Kähler沈め込みとする。$x(t) \in \bar{M}$ を $\bar{M}$ 内の荷電粒子の運動とする ($\bar{\nabla}_{\dot{x}}\dot{x} = \kappa\phi(\dot{x})$)。定数 c を $c = \eta(\dot{x})$ と定める。このとき $y(t) = \pi(x(t))$ は $\nabla_{\dot{y}}\dot{y} = (\kappa - 2c)J\dot{y}$ を満たす。特に、$x(t)$ が測地線ならば $\nabla_{\dot{y}}\dot{y} = -2cJ\dot{y}$ となる。

証明 $||\dot{x}||$ は荷電粒子の保存量なのでもしある時刻で $\dot{x} = 0$ となったとすると各時刻で $\dot{x} = 0$ となる。従って、この場合には $x(t)$ は定点になる。この場合、主張が成立することは明らかなので、各時刻で $\dot{x} \neq 0$ と仮定してよい。また、ある時刻で $\dot{x}$ が ξ に比例したとすると $x(t)$ は ξ の積分曲線として得られる測地線になる。この場合にも $y(t)$ が定点となり、主張が成立することは明らかなので、各点で $\dot{x}$ は ξ に比例しないと仮定してよい。言い換えれば各時刻で

$\dot{y} \neq 0$と仮定してよい。よって各時刻に対してM内の局所ベクトル場Xが存在して$X = \dot{y}$となる。$\bar{X}$でXの水平持ち上げを表すと

$$\dot{x} = \bar{X} + \eta(\dot{x})\xi = \bar{X} + c\xi.$$

ここで$x(t)$は荷電粒子なので

$$\kappa\phi\bar{X} = \kappa\phi\dot{x} = \bar{\nabla}_{\dot{x}}\dot{x} = \bar{\nabla}_{\bar{X}+c\xi}(\bar{X}+c\xi) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}+c(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\xi+\bar{\nabla}_{\xi}\bar{X}) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}+c(-2\phi\bar{X}+[\xi,\bar{X}]).$$

ここでξは0とπ-関係にあり、$\bar{X}$はXとπ-関係になるので

$$\pi[\xi,\bar{X}] = [\pi\xi,\pi\bar{X}] = 0.$$

即ち、$[\xi,\bar{X}]$は垂直ベクトルである。ξがKillingベクトル場になることと$\xi \perp \bar{X}$に注意して$[\xi,\bar{X}]$の垂直成分を計算すると

$$\eta([\xi,\bar{X}]) = g(\xi,[\xi,\bar{X}]) = \xi g(\xi,\bar{X}) = 0.$$

ゆえに$[\xi,\bar{X}] = 0$. よって

$$\kappa\phi\bar{X} = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X} - 2c\phi\bar{X}.$$

以上と[12], p. 212, Lemma 45, (3)より

$$\nabla_{\dot{y}}\dot{y} = \nabla_X X = d\pi(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{X}) = (\kappa+2c)\pi\phi\bar{X} = (\kappa+2c)J\dot{y}$$

ゆえに主張が示された。 □

注意 7.3 水平測地線のRiemann沈め込みによる像は測地線になることが知られている([12, p. 212, Cor. 46])。

8 Hermite対称空間内の荷電粒子の運動

(G,K)を既約Hermite対称対とし、$M = (G/K,J)$でHermite対称空間を表わす。GのLie環$\mathfrak{g}$を$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$と標準分解する。$\mathfrak{k}$の中心の元$J_o$を$T_o(M) = \mathfrak{m}$上で$\mathrm{ad}J_o = J$となるように選ぶ。$\pi : G \to M$で自然な射影を表わす。$\kappa$を定数としてKähler電磁場に関する荷電粒子の運動方程式

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = \kappa J\dot{x}$$

を考える。

定理 8.1 [足立-宇田川-前田[2]] $x(t)$を初期条件$x(0) = o, \dot{x}(0) = X \in \mathfrak{m}$なる荷電粒子の運動とする。このとき、$x(t) = \pi(\exp t(X + \kappa J_o))$.

[9]にこの定理の足立-宇田川-前田とは異なる方法による証明が与えてある。この定理からHermite対称空間内の荷電粒子の運動は単純性よりも強く次が成り立つことがわかる。

系 8.2 ([9]) 任意の荷電粒子$x(t)$に対してある$X \in \mathcal{I}_J(M)$が存在して$\dot{x}(t) = X_{x(t)}$となる。

話は逸れるが、万有引力に従う惑星の運動を運動方程式から純粋に調べるとき、万有引力はもちろん保存力であるから力学的エネルギー保存則が成り立ち、このことが一つには利用される。また、万有引力は中心力でもあるので角運動量保存則が成立する。角運動量保存則から惑星の運動は太陽を含むある「平面」内を運動していることがわかる。運動方程式を精密に解く前に解は「平面」内を運動することがわかるので方程式の未知関数を一つ減らすことが出来て方程式が調べやすくなる。この「平面」に当たる部分がHermite対称空間内の荷電粒子に対しても存在し、運動の記述が精密に出来ると主張しているのが次の二つの定理である。

Mがcompact型の場合と非compact型の場合に分けして考える。

定理 8.3 Mを階数rのcompact型Hermite対称空間とする。任意の荷電粒子の運動$x(t)$に対してM内のあるr次元平坦トーラスTが存在して$x(t)$はT内の測地線になる。

証明 等質性から$o \in M$と仮定してよい。$\delta(>0)$でMの断面曲率の最大値を表す。M内に$(o \in)(S^2(\delta))^r$が全測地的複素部分多様体として入っている(Hermann mapと呼ばれる。[6],[15],[16]参照)。$K_* T_o((S^2(\delta))^r) = T_o(M)$となるので$\dot{x}(0) \in T_o((S^2(\delta))^r)$と仮定して良い。このとき、$(S^2(\delta))^r$は全測地的複素部分多様体なので各$t$について$x(t) \in (S^2(\delta))^r$で$x(t)$は$(S^2(\delta))^r$内で見ても荷電粒子の運動に見える。$(S^2(\delta))^r = S^2(\delta)_1 \times \cdots \times S^2(\delta)_r$内の荷電粒子の運動は各2次元球面$S^2(\delta)_i$に射影すると小円$S^1_i$となる。$T = S^1_1 \times \cdots \times S^1_r$が求めるものである。 □

同様にして次が得られる。

定理 8.4 Mを階数rの非compact型Hermite対称空間とする。$-\delta(<0)$でMの断面曲率の最小値を表わす。$H^2(-\delta)$で二次元実双曲型空間を表わす。M内の任意の荷電粒子の運動$x(t)$に対して全測地的複素部分多様体$(H^2(-\delta))^r \subset M$が存在して$x(t)$は$(H^2(-\delta))^r$内の荷電粒子の運動になる。

注意 8.5 $H^2(-\delta)$や$(H^2(-\delta))^r$内の荷電粒子の運動については調べられている([1],[4],[13]を参照)。

9 佐々木ϕ-対称空間内の荷電粒子の運動

次の定義は高橋[14]による。

定義 9.1 佐々木多様体が**局所ϕ-対称空間**であるとは

$$\phi^2[(\nabla_V R)(X,Y)Z] = 0 \tag{9.12}$$

が任意の水平ベクトルX, Y, Z, Vについて成立するときを言う。

上の定義の由来について説明するために$\pi : \bar{M}^{2n+1} \to M^{2n}$を佐々木-Kähler沈め込みとする。$M$上のベクトル$X$に対して$\bar{X}$でその水平持ち上げを表す。$\bar{R}$及び$R$でそれぞれ$\bar{M}$及び$M$のRiemann曲率テンソルを表す。このとき、$M$上のベクトル$X, Y, Z, V$について

$$\overline{(\nabla_V R)(X,Y)Z} = -\phi^2[(\bar{\nabla}_{\bar{V}}\bar{R})(\bar{X},\bar{Y})\bar{Z}]$$

となる([14])。特にMが局所Hermite対称空間($\nabla R = 0$)ならば$\bar{M}$は局所ϕ-対称空間になる。これが局所ϕ-対称空間の定義の由来である。局所ϕ-対称空間に対して奥村接続(定義については[14]を参照)からRiemann等質構造テンソル(定義と性質については[17]を参照)を構成することが出来るので局所ϕ-対称空間は局所Riemann等質空間になることがわかる。

命題 9.2 佐々木多様体(M, g, ϕ, η, ξ)の各点xに対して次を満たす局所的なaffine変換s_xが付随していると仮定する。

$$s_x(x) = x, \quad (ds_x)_x = -1 + 2\eta \otimes \xi$$

このとき、Mは局所ϕ-対称空間である。

証明 s_xは局所的なaffine変換なので水平ベクトル$X, Y, Z, V \in T_x(M)$に対して

$$(\nabla_{s_x V}R)(s_x X, s_x Y)s_x Z = s_x((\nabla_V R)(X,Y)Z).$$

水平ベクトルに対して$s_x = -1$なので

$$(\nabla_V R)(X,Y)Z = -(\nabla_V R)(X,Y)Z + 2\eta((\nabla_V R)(X,Y)Z)\xi.$$

よって

$$(\nabla_V R)(X,Y)Z = \eta((\nabla_V R)(X,Y)Z)\xi.$$

ゆえにMは局所ϕ-対称空間である。

局所ϕ-対称空間の定義の大域版であるϕ-対称空間の定義も高橋([14])による。まず次のϕ-測地線の定義を行う。

定義 9.3 佐々木多様体内の測地線$x(t)$が**ϕ-測地線**であるとは$\eta(\dot{x}) = 0$となるときを言う。

定義 9.4 佐々木多様体(M, g, ϕ, η, ξ)が**ϕ-対称空間**であるとは次の(1)及び(2)を満たすときを言う。

(1) 各点$x \in M$に対してϕと可換な等長同型ϕ_xが存在して次を満たす。xのある近傍Uが存在して$\gamma(t)$をϕ-測地線で$\gamma(0)$がxを通るξの積分曲線上にあるものとするとき、$s_x(\gamma(t)) = \gamma(-t)$. (この条件から自動的に$s_x(x) = x, (ds_x)_x = -1 + 2\eta \otimes \xi, s_x^2 = 1$. 従って$\phi$-対称空間は局所$\phi$-対称空間になる。また、$s_x$は$x$に対して一意に定める。)

(2) Killingベクトル場ξはMの大域的な1径数変換群を誘導する。(これは自動的にϕと可換な等長同型になる。実際、ξはKillingだから誘導される1径数変換群は等長同型になり

$$\begin{aligned}(L_\xi\phi)(X) &= [\xi,\phi X]-\phi[\xi,X]\\ &= \nabla_\xi(\phi X)-\nabla_{\phi X}\xi-\phi(\nabla_\xi X-\nabla_X\xi)\\ &= (\nabla_\xi\phi)(X)+\phi^2X-\phi^2X\\ &= g(\xi,X)-\eta(X)\xi\\ &= 0.\end{aligned}$$

となるから誘導される1径数変換群はϕと可換になる)

逆に単連結完備局所ϕ-対称空間はϕ-対称空間になる。

以下、Hermite対称空間Mからϕ-対称空間$\tilde{M}$と佐々木-Kähler沈め込み$\pi:\tilde{M}\to M$を構成し、$\tilde{M}$内の荷電粒子の運動について考察する。

(G,K)を既約Hermite対称対とする。Kをcompactと仮定する。KのLie環$\mathfrak{k}$の半単純部分$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$をLie環に持つ$K$内のLie部分群で連結成分の個数が有限のものを$\tilde{K}$と表す。$\tilde{K}$はcompact半単純Lie群になる。$\tilde{K}$の単位連結成分を$\tilde{K}_0$と表す。商多様体$\tilde{M}=G/\tilde{K}$には佐々木$\phi$-対称空間の構造が入り自然な射影

$$\pi:\tilde{M}=G/\tilde{K}\to M=G/K; g\tilde{K}\mapsto gK$$

は佐々木-Kähler沈め込みで更にG-同変S^1-束になる([14])。

Mがcompact型(非compact型)のとき、$\tilde{M}$をcompact型(非compact型)と呼ぶ。

佐々木構造の誘導の仕方についてcompact型の場合のみ詳しく記しておく。

(G,K)をcompact型既約Hermite対称対とする。$\dim(G/K)=2n$とおく。

Bで$\mathfrak{g}$のKilling形式を表す。$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$と標準分解する。

$\mathfrak{k}$の中心の元Z_0を$\mathfrak{m}$上で$(\mathrm{ad}Z_0)^2=-1$ととる。$\tilde{\mathfrak{m}}=\mathfrak{m}\oplus\boldsymbol{R}Z_0$とおく。$\tilde{\mathfrak{m}}$上の内積$\langle\ ,\ \rangle$を

$$\langle\ ,\ \rangle=-\frac{1}{8n}B$$

と定める。$[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$をLie環に持つ$K$のLie部分群でその連結成分の個数が有限のものを$\tilde{K}$と表すと$\tilde{K}$はcompact半単純Lie群になる。$\tilde{M}=G/\tilde{K}$とおき、その原点を$\tilde{o}$で表す。内積$\langle\ ,\ \rangle$を$\tilde{M}$上の$G$-不変ベクトル場に拡張する。$\xi=2Z_0$を$\tilde{M}$上の$G$-不変ベクトル場に拡張する。$\tilde{M}$上の$G$-不変1-形式$\eta$を$\eta(X)=\langle X,\xi\rangle$と定める。$\tilde{\mathfrak{m}}$上で$\phi=\mathrm{ad}Z_0$と定め$\tilde{M}$上の$G$-不変(1,1)-テンソルに拡張する。このとき、$(\tilde{M},\langle\ ,\ \rangle,\phi,\eta,\xi)$は局所$\phi$-対称空間になる。更に次が成立する。

命題 9.5 $(\tilde{M},\langle\ ,\ \rangle,\phi,\eta,\xi)$は佐々木$\phi$-対称空間である。

証明 compact型既約Hermite対称対(G,K)の定める回帰的自己同型写像をθと表す。

$$s_{\tilde{o}}:\tilde{M}\to\tilde{M}; g\tilde{K}\mapsto\theta(g)\tilde{K}$$

とおくと$s_{\tilde{o}}$はwell-definedになる。$s_{\tilde{o}}$が等長変換になることを示す。各$X \in T_x(\tilde{M})$に対してある$a \in G$と$X_0 \in \tilde{\mathfrak{m}}$が存在して$X = a_* X_0$. このとき、

$$\begin{aligned}(s_{\tilde{o}})_* X &= \frac{d}{dt} s_{\tilde{o}}(a \exp tX_0)_{|t=0} = \frac{d}{dt}\theta(a) \exp t\theta X_0 \tilde{K}_{|t=0} \\ &= \theta(a)_*(\theta X_0)_{\tilde{\mathfrak{m}}}.\end{aligned}$$

$X_0 = Y_0 + \eta(X_0)\xi$ $(Y_0 \in \mathfrak{m})$と表示すると

$$(s_{\tilde{o}})_* X = \theta(a)_*(-Y_0 + \eta(X_0)\xi).$$

ゆえに

$$||(s_{\tilde{o}})_* X|| = ||-Y_0 + \eta(X_0)\xi|| = ||X_0|| = ||X||.$$

よって$s_{\tilde{o}}$は等長変換である。

$s_{\tilde{o}}$がϕと可換になることを示す。

$$\begin{aligned}s_{\tilde{o}}(\phi X) &= s_{\tilde{o}}(a_* \phi X_0) = \theta(a)_*(\theta(\phi X_0))_{\tilde{\mathfrak{m}}} = -\theta(a)_*\phi Y_0, \\ \phi s_{\tilde{o}} X &= \phi\theta(a)_*(-Y_0 + \eta(X_0)\xi) = -\theta(a)_*\phi Y_0.\end{aligned}$$

よって$s_{\tilde{o}}$はϕと可換な等長変換である。

$x(t)$を$x(0) = \exp a\xi\tilde{K}$ $(\exists a \in \boldsymbol{R})$となる$\phi$-測地線とするとある$X \in \mathfrak{m}$が存在して$x(t) = \exp a\xi \exp tX\tilde{K}$. このとき、

$$s_{\tilde{o}}(x(t)) = \exp a\xi \exp(-tX)\tilde{K} = x(-t).$$

$x = a\tilde{K}$ $(a \in G)$におけるϕ-測地的対称変換s_xは

$$s_x = a \circ s_{\tilde{o}} \circ a^{-1}$$

とすれば良い。

ξの定義より

$$\xi_{g\tilde{K}} = g_*\xi = \frac{d}{dt} g \exp t\xi\tilde{K}_{|t=0}.$$

ここで

$$\Psi_t : \tilde{M} \to \tilde{M}; g\tilde{K} \mapsto g \exp t\xi\tilde{K}$$

とおくと$k \in \tilde{K}$に対して

$$gk \exp t\xi\tilde{K} = g\exp t\xi\tilde{K} \quad (\exp t\xi \in Z(K))$$

となるのでΨ_tはwell-definedで

$$\begin{aligned}\Psi_{t+s}(g\tilde{K}) &= g \exp s\xi \exp t\xi\tilde{K} \\ &= \Psi_t(g \exp s\xi\tilde{K}) \\ &= \Psi_t(\Psi_s(g\tilde{K})).\end{aligned}$$

$$\frac{d\Psi_t(g\tilde{K})}{dt}_{|t=0} = \xi_{g\tilde{K}}$$

ゆえに主張が示された。

compact 型佐々木ϕ-対称空間$(\tilde{M}, g, \phi, \eta, \xi)$内の荷電粒子の運動を調べる。$M$の階数を$r$とする。$(S^2(\delta))^r$を

$$(S^2(\delta))^r = SU(2)^2/SO(2)^r, \quad SO(2)^r = SO(2)_1 \cdots SO(2)_r$$

と表示すると

$$\pi^{-1}((S^2(\delta))^r) = SU(2)^r\tilde{o} \subset \tilde{M}$$

となる。

定理 9.6 (1) $(\tilde{K}_0)_* T_{\tilde{o}}(SU(2)^r\tilde{o}) = T_{\tilde{o}}(\tilde{M})$.

(2) $SU(2)^r\tilde{o}$は$\tilde{M}$内の全測地的部分多様体である。

$SU(2)^r\tilde{o} \cong SU(2)^r/(SO(2)^r \cap \tilde{K})$ には$\tilde{M}$から自然に佐々木多様体の構造が誘導され$\tilde{M}$内の荷電粒子の運動を調べることは$SU(2)^r\tilde{o}$内の荷電粒子の運動を調べることに帰着される。$\Gamma = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_r\} (\subset \mathfrak{k})$で$(G, K)$の強直交根系を表すと、これらの元は互いに直交し、長さが一定で$\mathfrak{so}(2)_i = \boldsymbol{R}\gamma_i$となる。

命題 9.7

$$SO(2)^r \cap \tilde{K} = \cup_{a \in SO(2)_1 \cap \tilde{K}} a\{\exp \sum_{j=1}^{r} x_j\gamma_j \mid \sum_{j=1}^{r} x_j = 0\}.$$

右辺は$r-1$次元トーラスの互いに素な和である。

(G, K)が古典型で$\tilde{K}$が連結のときには次が成り立つ。

命題 9.8 $\tilde{K}$を連結と仮定する。

(1) $(G, K) = (Sp(n), U(n)), (SO(p+2), SO(p) \times SO(2)), (SU(p+q), S(U(p) \times U(q)))$ のとき、$\#(SO(2)_1 \cap \tilde{K}) = 1$,

(2) $(G, K) = (SO(2n), U(n))$のとき、$\#(SO(2)_1 \cap \tilde{K}) = 2$.

これらの結果と$SU(2)^r/(SO(2)^r \cap \tilde{K})$内の荷電粒子の運動は$\mathfrak{su}(2)^r$から$SU(2)^r$への指数写像の二つの積を用いて表すことが出来ることを組み合わせるとcompact 型ϕ-対称空間$\tilde{M}$内の荷電粒子の運動を調べることが出来る。非compact 型ϕ-対称空間内の荷電粒子の運動を調べることが今後の課題である。

参考文献

[1] T. Adachi, Kähler magnetic fields on a complex hyperbolic space, A report on Korea-Japan joint workshop in Mathematics 2000, 9–20.

[2] T. Adachi, S. Maeda and S. Udagawa, Simpleness and closedness of circles in compact Hermitian symmetric spaces, Tsukuba J. Math. (2000), **24**, pp. 1–13.

[3] D. E. Blair, Contact manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Math. 509, Springer-Verlag, 1976.

[4] A. Comtet, On the Landau levels on the hyperbolic plane, Annals of physics **173** (1987), pp. 185–209.

[5] S. Guillemin and S. Sternberg, Symplectic techniques in physics, Cambridge Univ. Press, New York (1984).

[6] S. Helgason, Totally geodesic spheres in compact symmetric spaces, Math. Ann. **165** (1966), 309–317.

[7] O. Ikawa, Hamiltonian dynamics of a charged particle, to appear in Hokkaido Math. J.

[8] O. Ikawa, Motion of charged particles in homogeneous Kähler and homogeneous Sasakian manifolds, preprint.

[9] O. Ikawa, Motion of charged particles in Kähler C-spaces, preprint.

[10] A. Kheyfets and L. K. Norris, $P(4)$ affine and superhamiltonian formulations of charged particle dynamics, International journ. of Theoretical phisics, **27**, no. 2, (1988), pp. 159–182.

[11] 村上信吾著、多様体、共立出版.

[12] B. O'Neill, Semi-Riemannian geometry, Academic Press, New York (1983).

[13] T. Sunada, Magnetic flows on a Riemannian surface, Proc. KAIST Math. Workshop (Analysis and geometry) **8** (1993), 93–108.

[14] T. Takahashi, Sasakian ϕ-symmetric spaces, Tohoku Math Journ **29** (1977), 91–113.

[15] M. Takeuchi, On orbits in a compact Hermitian symmetric space, American Journal of Mathematics, Vol. XC (1968), 657–680.

[16] H. Tasaki, The cut locus and the diastasis of a Hermitian symmetric space of compact type, Osaka J. Math. **22** (1985), 863–870.

[17] Tricerri, F. and Vanhecke, L.: Homogeneous structures on Riemannian manifolds, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **83**(1983).

[18] 内山龍雄著、一般相対性理論、裳華房 (1991).